28/4/2017

Έστω G: ομάδα και $H \leq G$ υποομάδα της G

Ορίζοντας $\forall x, y \in G: x \sim_H y \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H$ αποκτούμε

μια σχέση ισοδυναμίας $\sim_H$ επί του G

Η κλάση ισοδυναμίας του $x \in G$ ως προς τη $\sim_H$

είναι: $[x]_H = x \cdot H = \{x \cdot h \in G \mid h \in H\}$

Ορισμός xH καλείται αριστερή πλευρική κλάση ή
αριστερό σύμπλοκο του x ως προς την H.

Το σύνολο πηλίκο της G ως προς τη σχέση
ισοδυναμίας $\sim_H$ θα είναι: $G/_{R_H} = \{[x]_H \subseteq G \mid x \in G\}$

$= \{xH \subseteq G \mid x \in G\}$

Παρόμοια ορίζοντας: $\forall x, y \in G: x \underset{H}{\sim} y \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim_H$ επί του G.

Η κλάση ισοδυναμίας του $x \in G$ ως προς την
σχέση ${}_H\sim$ είναι:

${}_H[x] = \{y \in G \mid y \underset{H}{\sim} x\} = \{y \in G \mid y \cdot x^{-1} \in H\} = \{y \in G \mid y \cdot x = h \in H\}$

$= \{y \in G \mid y = h \cdot x, \text{ όπου } h \in H\} = \{h \cdot x \in G \mid h \in H\} = Hx$

Άρα, ${}_H[x] = H \cdot x = \{h \cdot x \in G \mid h \in H\}$

Ορισμός: Το σύνολο $H\cdot x$ καλείται δεξιά πλευρική κλάση ή δεξιό σύμπλοκο του x ως προς H.

Το σύνολο πηλίκο της G ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\underset{H}{\sim}$ είναι $G/_H\mathcal{R} = \{ {}_H[x] \subseteq G \,/\, x \in G \} = \{ Hx \leq G \,|\, x \in G \}$

Πρόταση: Τα σύνολα $G/\mathcal{R}_H$ και $G/_H\mathcal{R}$ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Απόδειξη: Ορίζουμε απεικόνιση $\varphi: G/\mathcal{R}_H \to G/_H\mathcal{R}$

$\varphi(xH) = Hx^{-1}$

• Αρχικά δείχνουμε ότι η φ είναι καλά ορισμένη:

Έστω ότι $x\cdot H = y \cdot H$. Θα δείξουμε ότι $H\cdot x^{-1} = H \cdot y^{-1}$

Θα έχουμε ότι $[x]_H = [y]_H \Rightarrow x \sim_H y \Rightarrow x^{-1}\cdot y \in H$

$\Rightarrow x^{-1}\cdot y = h \in H \Rightarrow x^{-1} = h\cdot y^{-1} \in Hy^{-1} = {}_H[y^{-1}]$

Άρα, ${}_H[x^{-1}] = {}_H[y^{-1}] \Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}$

• Θα δείξουμε ότι η φ είναι επί:

Έστω $H\cdot x$ μια δεξιά πλευρική κλάση, $H\cdot x \in G/_H\mathcal{R}$

Τότε $\varphi(x^{-1}H) = H(x^{-1})^{-1} = H\cdot x$. Άρα, η φ είναι επί.

Θα δείξω ότι η φ είναι 1-1:

Έστω $\varphi(x \cdot H) = \varphi(y \cdot H)$. Τότε θα έχουμε ότι

$$Hx^{-1} = Hy^{-1} \Rightarrow {}_H[x^{-1}] = {}_H[y^{-1}] \Rightarrow x^{-1} \underset{H}{\sim} y^{-1}$$

$$\Rightarrow x^{-1} \cdot (y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow x^{-1} \cdot y \in H \Rightarrow x \sim_H y$$

$$\Rightarrow [x]_H = [y]_H \Rightarrow x \cdot H = y \cdot H$$

Άρα, από τα παραπάνω $|G/_{\mathcal{R}_H}| = |G/_H\mathcal{R}|$

Ορισμός: Αν H είναι μια υποομάδα μιας ομάδας G, τότε ο δείκτης της H στην G, ορίζεται να είναι η κοινή τιμή:

$$[G:H] = |G/_{\mathcal{R}_H}| = |G/_H\mathcal{R}|$$

Λήμμα: Για κάθε $x, y \in H$: $|x \cdot H| = |H| = |y \cdot H|$

Απόδειξη: Ορίζουμε απεικόνιση $\varphi : xH \to yH$ ώστε $\varphi(x \cdot h) = y \cdot h$ η οποία είναι καλά ορισμένη.

Αρχικά θα δείξω ότι φ είναι 1-1:

Έστω $\varphi(x \cdot h) = \varphi(xh') \Rightarrow y \cdot h = y \cdot h' \Rightarrow h = h'$

$\Rightarrow xh = xh'$. Άρα φ 1-1

Θα δείξω ότι η φ είναι επί: Για κάθε $y\cdot h \in y\cdot H$: $\varphi(x\cdot h) = y\cdot h$
Άρα, φ επί

Άρα $|x\cdot H| = |y\cdot H|$. Θέτοντας $y = e$ θα έχουμε:
$(\forall x \in G)$: $|x\cdot H| = |e\cdot H|$

~~Θρασα~~ Όμως $e\cdot H = \{e\cdot h \in G \mid h \in H\} = \{h \in G \mid h \in H\} = H$.

Άρα, $\forall x, y \in G$: $|x\cdot H| = |H| = |y\cdot H|$

Απόδειξη

Έστω G: πεπερασμένη ομάδα τάξης n. Θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας R_H και τότε το σύνολο πηλίκο G/R_H αποτελεί μια διαμέριση του G. Επειδή $|G| < +\infty$, έπεται ότι $|G/R_H| = [G:H] < +\infty$ και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G/R_H = \{[x_1]_H, [x_2]_H, \dots, [x_k]_H\} = \{x_1H, x_2H, \dots, x_kH\}$ όπου $k = [G:H]$

Τότε $G = x_1H \cup x_2H \cup \dots \cup x_kH \Rightarrow |G| = |x_1H \cup x_2H \cup \dots \cup x_kH|$

$$= |x_1H| + |x_2H| + \dots + |x_kH|$$

$$= |H| + |H| + \dots + |H| = k\cdot|H| = [G:H]\cdot|H|$$

Θεώρημα Lagrange: Αν G πεπερασμένη ομάδα και $H \leq G$ είναι μια υποομάδα της, τότε: $|G| = |H| \cdot [G:H]$,

ιδιαίτερα: $|H| / |G|$

Εφαρμογές του Θεωρήματος Lagrange

(1) Αν G: ομάδα και $|G|<+\infty$, τότε $\forall x \in G$: $o(x) \mid |G|$

Απόδειξη: Θεωρούμε την $\langle x\rangle \leq G$ και γνωρίζουμε ότι $|\langle x\rangle| = |o(x)|$. Άρα από Θ. Lagrange:

$$o(x) = |\langle x\rangle| \mid |G|$$

(2) Αν G πεπερασμένη ομάδα τότε $\forall x \in G$: $x^{|G|} = e$

Απόδειξη: $o(x) \mid |G| \Rightarrow |G| = o(x)\cdot k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x^{|G|} = x^{o(x)\cdot k} = \left(x^{o(x)}\right)^k = e^k = e$$

(3) Αν G πεπερασμένη ομάδα με τάξη $|G| = p$, p πρώτος. Τότε G κυκλική. Ιδιαίτερα, με ακρίβεια ισομορφίας υπάρχει ακριβώς μια ομάδα τάξης p, $\forall p$ πρώτο.

Προφανώς $G \neq \{e\}$, διότι $|G| = p$ πρώτος. Άρα $\exists a \in G$ με $a \neq e$. Τότε από (1) $o(a) \mid |G| = p \Rightarrow o(a) = 1$ ή $o(a) = p$.
Προφανώς, $o(a) \neq 1$ διότι $a \neq e$. Άρα $o(a) = p$

$\Rightarrow |\langle a\rangle| = p = |G|$. Προφανώς τότε $\langle a\rangle = G$,

$\Rightarrow G$ κυκλική με γεννήτορα οποιοδήποτε στοιχείο $\neq e$

Τάξη ομάδας	Πλήθος μη-ισόμορφων ομάδων
2	1
2^2	2
2^3	5
2^4	15
2^5	51
2^6	267
2^7	2.328
2^8	56.092
2^9	10.494.213
2^{10}	49.487.365.422

Το πλήθος των μη ισόμορφων ομάδων με τάξη το πολύ 2.000 είναι 49.910.529.484. Δηλαδή, το πλήθος των μη-ισόμορφων ομάδων με τάξη 1024 είναι το 99% των μη ισόμορφων ομάδων με τάξη ≤ 2000.

(4) Έστω G: ομάδα και H και K: πεπερασμένες υποομάδες της G και υποθέτουμε ότι $(|H|, |G|) = 1$

Τότε $|H \cap K| = 1$. Δηλαδή $H \cap K = \{e\}$

Απόδειξη: Έχουμε, ότι $H \cap K \leq H$, $H \cap K \leq G$ $\xrightarrow[\text{Lagrange}]{\text{Θεώρημα}}$ $|H \cap K| \mid |H|$, $|H \cap K| \mid |K|$

$\Rightarrow |H \cap K| \mid (|H|, |K|) = 1 \Rightarrow |H \cap K| = 1 \Rightarrow H \cap K = \{e\}$

Οι υποομάδες της S_3:

$S_3 = \left\{ i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right.$

$\left. \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

Υποομάδες τάξης 1: $\langle i \rangle = \{i\}$

Υποομάδες τάξης 2: $\langle \mu_1 \rangle = \{i, \mu_1\}$, $\langle \mu_2 \rangle = \{i, \mu_2\}$, $\langle \mu_3 \rangle = \{i, \mu_3\}$

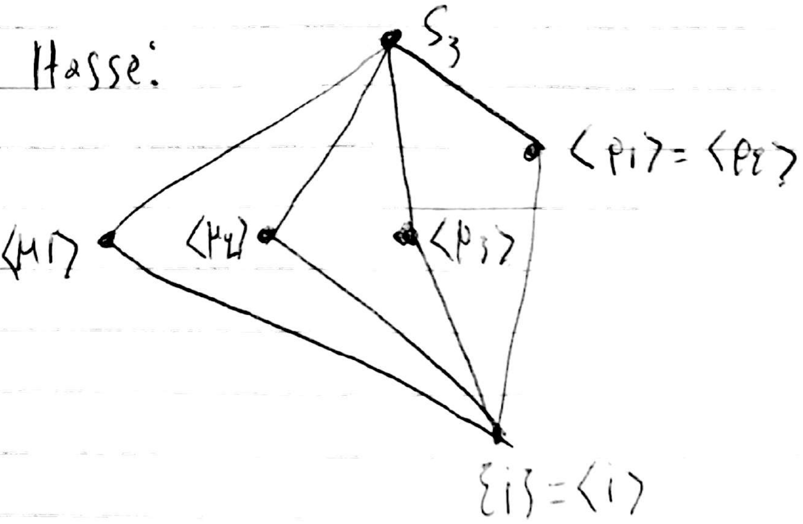
Υποομάδες τάξης 3: $\langle \rho_1 \rangle = \{i, \rho_1, \rho_2\}$, $\langle \rho_2 \rangle = \{i, \rho_1, \rho_2\}$

(αφού $\rho_1^2 = \rho_2$, $\rho_2^2 = \rho_1$)

Υποομάδες τάξης 6: S_3

Δεν υπάρχουν υποομάδες άλλης τάξης από το Θεώρημα Lagrange

Διάγραμμα Hasse:



Παρατήρηση: Το αντίστροφο του Θεωρήματος Lagrange δεν ισχύει: η συμμετρική S_4 περιέχει μια υποομάδα A_4 τάξης 12 και η A_4 δεν περιέχει υποομάδα τάξης 6, αν και $6 \mid |A_4| = 12$

Κλάσεις ομάδων για τις οποίες ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Lagrange: Κυκλικές ομάδες, ομάδα Klein, S_3, κάθε ομάδα με τάξη δύναμη ενός πρώτου αριθμού, p^n: p πρώτος, διεδρικές ομάδες D_n (η ομάδα συμμετρίας ενός κανονικού n-γώνου)

Παρατήρηση: Σε μια πεπερασμένη ομάδα, κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη. Το αντίστροφο, υπάρχουν άπειρες ομάδες κάθε στοιχείο των οποίων έχει πεπερασμένη τάξη: $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\} \leq \mathbb{C}^*$

Τότε $|U|=+\infty$ και $\forall z\in U : o(z)<+\infty$

Η ομάδα των τετρανίων του Hamilton

$Q=\{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm K\} \leq GL_2(\mathbb{C})$ ⇝ αντιστρέψιμοι 2×2

Όπου $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$(\pm I)^2=(\pm J)^2=(\pm K)^2=-I_2$ και $I\cdot J=K$

$I\cdot K=J$

$K\cdot J=I$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι το Q είναι κλειστό στην πράξη της $GL_2(\mathbb{C})$ και άρα $|Q|=8<+\infty$

έπεται ότι $Q\leq GL_2(\mathbb{C})$ και $|Q|=8$

$\pm I$ έχει τάξη 4 $\to \langle \pm I\rangle$: κυκλική τάξης 4 $\{I_2, -I_2, I, -I\}$

$\pm J$ έχει τάξη 4 $\to \langle \pm J\rangle$: » » » $\{I_2, -I_2, J, -J\}$

$\pm K$ έχει τάξη 4 $\to \langle \pm K\rangle$: » » » $\{I_2, -I_2, K, -K\}$

$-I_2$ έχει τάξη 2 $\to \langle -I_2\rangle$ » » 2 $\{I_2, -I_2\}$

I_2 έχει τάξη 1 $\to \langle I_2\rangle$ » » 1 $\{I_2\}$

Αν $H \leq Q$ τότε από το Θεώρημα Lagrange $\Rightarrow |H| \mid |Q|$

$\Rightarrow |H| = 1, 2, 4, 8$

- Αν $|H| = 1 \Rightarrow H = I_2$

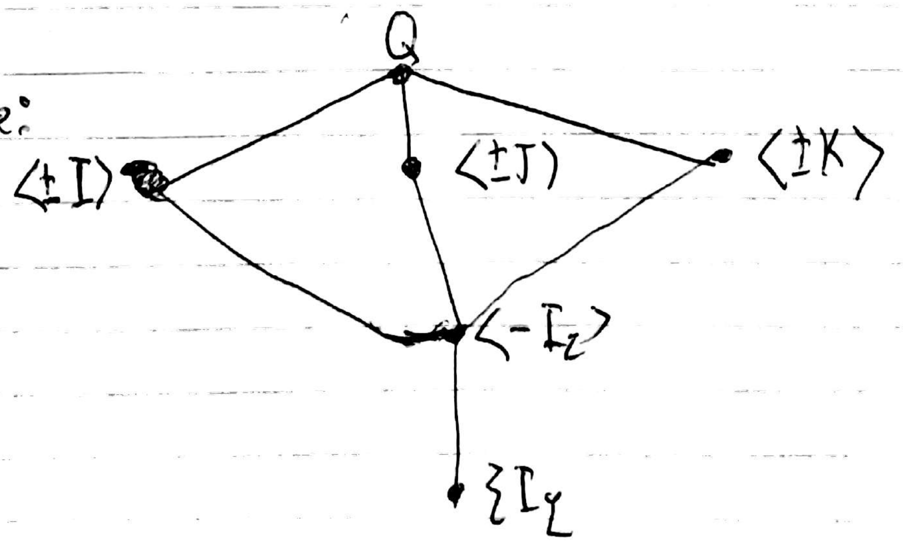
- Αν $|H| = 2 \Rightarrow$ η H: κυκλική με γεννήτορα ένα στοιχείο τάξης 2. Το μόνο στοιχείο τάξης 2 της Q είναι το $-I_2$.
  Άρα $H = \langle -I_2 \rangle$

- Αν $|H| = 4 \Rightarrow$ είτε η H είναι ισόμορφη με την ομάδα του Klein (και τότε η H θα περιέχει 3 στοιχεία τάξης 2: άτοπο διότι Q έχει μόνο ένα στοιχείο τάξης 2) είτε η H είναι ισόμορφη με μια κυκλική τάξης 4 και άρα θα είναι μια εκ των $\langle \pm I \rangle, \langle \pm J \rangle, \langle \pm K \rangle$

- Αν $|H| = 8$, τότε προφανώς $H = Q$

Άρα, συνοπτικά οι υποομάδες της Q είναι: $Q, \langle \pm I \rangle, \langle \pm J \rangle, \langle \pm K \rangle, \langle -I_2 \rangle, \{I_2\}$

Διάγραμμα Hasse:



Ομάδες τάξης 6: $(\mathbb{Z}_6,+)$ και S_3

Ομάδες τάξης 8: $\underbrace{\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}_{\text{αβελιανές}}, \underbrace{Q, D_4}_{\text{μη-αβελιανές}}$